**大道至简，高考解析几何压轴题解法的优化**

　　鸡西市数学名师工作室　孙长卿　

**1.问题的提出**

直线与圆锥曲线位置关系综合问题是综合了直线、圆锥曲线的有关概念、方程、性质等知识，涉及弦长、中点、交点、切线、斜率、对称、面积、最值、定点定值、参数范围等类型。此类问题的特点是信息量大、运算量大、思维难度大，在高考中常以压轴题的身份出现，是高考命题者的最爱也是考生心中的痛。顺利解决此类问题要求学生要具备一定的知识储备、熟练的思想方法、良好的思维品质及运算素养，同时还要掌握一些常用结论、解法规律等。

本文以今年高考解析几何压轴题解法的对比及最优解法的探究，期望能够引领学生快速找到解题的切入点、寻求最佳运算路径、降低运算量、成功解题，进而体验攻克难题的成就感，重拾信心提升运算素养。

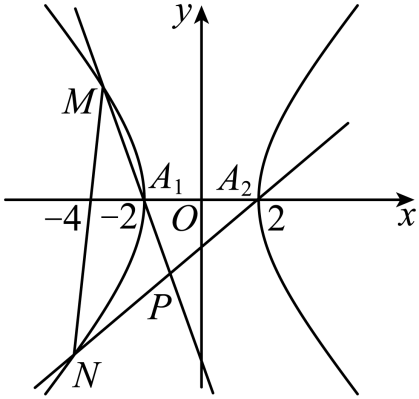
**2.解法优化探究**

解题过程中，学生一但解题成功，往往会立刻陷入成功解题后的心理自我满足之中，并停止不前。更不会顾及和反思此题解法的繁简优劣，只以问题获解为终极目标。而这些习惯恰好阻碍了学生良好思维品质和运算素养的养成。下面通过具体案例探讨解法优化的办法，以追求大道至简、以简驭繁之道，更是有效提升学生运算素养之道。

例**（**2023年全国新高考2卷第21题）已知双曲线C的中心为坐标原点，左焦点为，离心率为．

　　（1）求*C*的方程；

　　（2）记*C*的左、右顶点分别为，，过点的直线与*C*的左支交于*M*，*N*两点，*M*在第二象限，直线与交于点*P*．证明：点在定直线上．



（1）解略。

（2）解法一：直线斜率不为0，设、，直线的方程为，由于直线交双曲线于左支，则其斜率绝对值大于渐近线斜率2，则有，与联立整理得

，且，

则，，

又直线的方程为，直线的方程为，

联立直线与直线的方程消去可得

＝＝＝＝

代入根的关系得

＝＝＝＝

，

　　∴由可得，即，据此可得点在定直线上运动。

点评：本解法比较常规，也是相对简单的解法。常规思路应该是求得点坐标（运算量较大），进而探求点坐标特征，结合＝，化简＝＝＝－1，得，所以判断点在定直线上运动。

　　通过观察发现，，其中为定点的横坐标，4为，为定直线方程,进而猜想一般结论：设双曲线中， 为轴上不同于双曲线中心及顶点的任一点，过引一直线交双曲线于、两点，则直线，的交点在直线：上。反之易然。特例，当时，定点即为焦点，定直线即为准线。证明略。

其实，依据射影几何原理，这里的定点与定直线也就是极点与其极线；据配极原则，定直线上的任一点与直线也是一对极点与极线关系。我们发现高考中很多压轴题都有着高等数学的背景，再如2021年全国乙卷理科21题也涉及极点与极线问题。“理解与高中数学关系密切的高等数学的内容，能够从更高的观点理解高中数学知识的本质”[1]，是我们数学教师要时刻牢记的基本认知，只有找到这道题或这类题的“源头”，才会发现万变不离其宗，风景这边独好！

要明确运算过程即是一种演绎推理过程，即是在明确运算对象基础上，依据所掌握的算理算法，探求合理的运算思路及程序，进而求得结果的过程。这一过程中我们应该努力做到，抓住问题核心、优化解题程序、以简驭繁。

如掌握了上述一般原理，其体现了客观世界动与静、对立与统一、普遍联系的基本道理。则可预先确定直线， 的交点在直线：上，则有以下更简洁解法。

解法二：

　　依据上述结论，猜想直线与的交点在定直线上，于是两方程和中代入得和，消去，即证，即，代入，，化简得，结合，等式成立。所以得定直线为。

点评：既然已知结论，不妨逆向推导，则会更大简化运算量。

椭圆中也有类似的结论。

**3、结束语**

　　“妙言至径，大道至简”，好话往往最直截了当，越是大道理往往越是简单明了，简单就是最好的逻辑！“道生一，一生二，二生三，三生万物”、“衍化至繁”世界由简而生，“见素抱朴”呈现本真坚守质朴是为道，数学抽象、物理定律、化学原理等等无不用最简洁的方式表达着最深刻的道理！那么简从何来？

一是要避免机械刷题现象，大量刷题看似很用功很努力，但却有意绕开了思维层面的对问题的深度思考和对解法优劣的深入反省。罗增儒教授说: “解一道题忘一道题，或在同一思维层次上重复做好几道题，并不能获得解题能力的提高”。“忽视解题后的再思考，恰好错过了提高的机会，无异于‘入宝山而空返’”。 [3]所以解题后对问题题型、解法思路、运算程序等的归纳总结，对问题本质规律及个性特征的深入挖掘，进而从更高视角重新审视问题、解决问题，是我们能够做到举一反三、触类旁通的必由之路。简而智。

二是要求教师要有良好的独立思考习惯和创新意识，没有创新意识的教师是培养不出有创新精神的学生的。课堂上教师要时刻引导学生多问几个为什么：有没有更好的表述？有没有更好的解法？有没有其它情形？有没有不合题意的情形？有没有特例？可不可以导出更一般的结论？等等。不愿深度思考的教师才是真正懒惰不负责任的。简则优。

三是解题教学中教师要通过一题多解、变式训练等方式训练学生良好的思维品质和运算素养。在这一过程中学生思维才能展开联想、类比、发散、深刻、批判甚至产生顿悟，灵感才能迸发，才能发现“道”，即本质规律。简即道。