2024年高考数学高数背景分析及高数解法

鸡西市高中数学名师工作室　孙长卿

深入研究高考数学试题，在一些试题中总会找到高数的影子。如近几年常见的极点极线背景的试题，如2024年全国甲卷理科20题，2023年全国新课标2卷21题，2023年全国乙卷理科20题，2022年全国乙卷理科20题，2021年全国甲卷理科20题，2020年全国新课标1卷理科20题等。本文对2024年两道试题探寻其高数背景，以开阔大家视野，以期对高中数学教学及高三备考有些启发。

一、高数背景知识

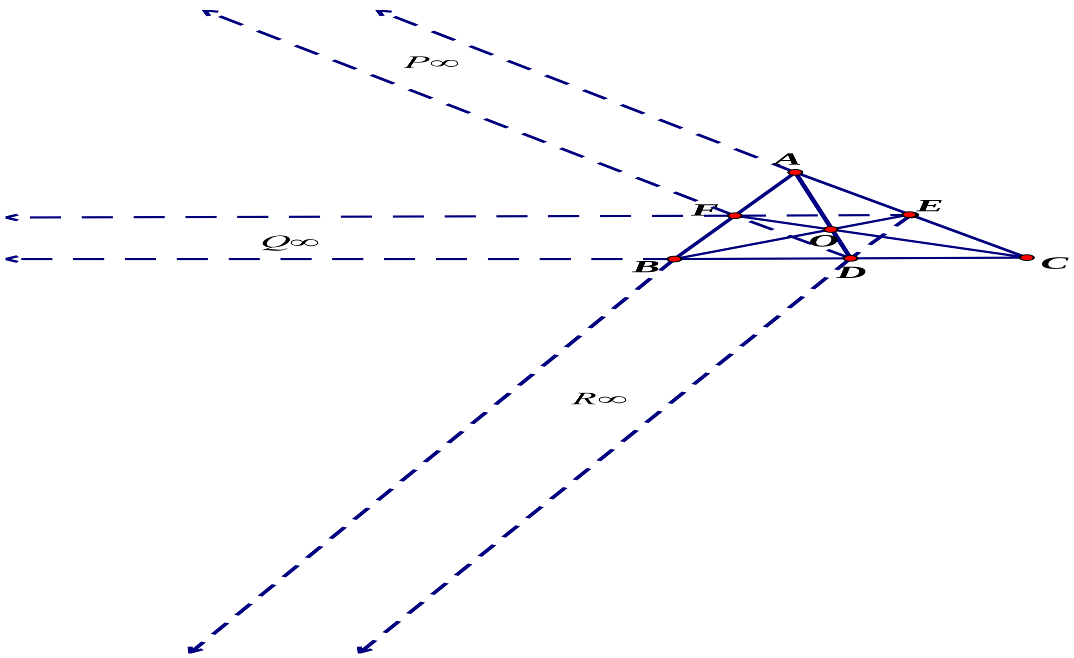
为说明问题，以下我们列举一些高数知识，这些知识均出自《高等几何》，也称《射影几何》，它是研究图形在射影变换下不变的性质的一门几何学。

1、无穷远点与无穷远直线：在射影观点下，平面内所有平行直线交于一点，称为无穷远点，记作P_∞；而所有无穷远点的集合构成一条直线叫做无穷远直线，记作l_∞。即一般地，所有无穷远点共线于无穷远直线。

2、德萨格定理的逆定理：如果两个三角（点）形对应边的交点在一直线上，则对应顶点的连线交于一点。

应用举例，求证：三角形的三条中线共点。

证明：如图，若ΔABC三边中点分别为D,E,F，则$EF\ /\!/\ BC$，因它们平行则交于无穷远点Q_∞，同理，DE与AB平行且交于无穷远点R_∞，DF与AC平行且交于无穷远点P_∞，则Q_∞，R_∞，P_∞共线于无穷远直线l_∞。即对ΔABC和ΔDEF，它们的三对对应边分别交于无穷远点且共线于无穷远直线，即对应边的交点共线，则由德萨格逆定理，可得其对应顶点的连线AD，BE，CF共点于O，证毕。

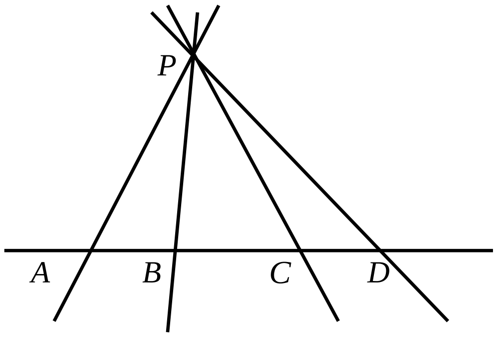


2、交比与调和共轭：若四点 P_1,P_2,P_3,P_4 共线，则定义它们的交比 (P_1P_2,P_3P_4)

$=\dfrac{P_1P_3\cdot P_2P_4}{P_2P_3\cdot P_1P_4}$，其中 P_1P_3 等为有向线段的数量，点 P_1,P_2 叫做基点偶，点 P_3,P_4 叫做分点偶。

特别的，如果 (P_1P_2,P_3P_4) =-1，交比值-1 叫做调和比，并称点偶 P_1,P_2 与点偶 P_3,P_4 调和共轭，也称四点 P_1,P_2,P_3,P_4 为调和点列。

3、调和线束：如图，若四点 A,C,B,D 成调和点列，在这四点所在直线外任取一点 P,则所形成的四条射线 PA,PC,PB,PD 称为调和线束。分别设此四条直线的斜率为 k_1,k_2,k_3,k_4，则有 $\dfrac{(k_1-k_3)\cdot(k_2-k_4)}{(k_2-k_3)\cdot(k_1-k_4)}=-1$。特别地，当 k_1 不存在（k_1 无穷大,PA 垂直 x 轴）时 $\dfrac{(k_1-k_3)}{(k_1-k_4)}=1$，从而有 $\dfrac{(k_2-k_4)}{(k_2-k_3)}=-1$，即 $k_3+k_4=2k_2$；当 k_1 =0（PA 平行 x 轴）时，有 $\dfrac{1}{k_3}+\dfrac{1}{k_4}=\dfrac{2}{k_2}$。



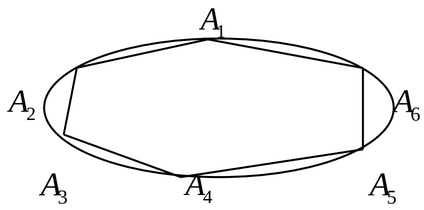
4、调和共轭点：给定二阶曲线 C，如果两点 P,Q（P 不在曲线 C 上）的连线与二阶曲线交于两点 M,N，且 $(PQ,MN)=-1$，则称 P,Q 关于二阶曲线 C 调和共轭，或点 P 与 Q 关于二阶曲线 C 互为共轭点。

5、极点极线：上面概念中，其中调和共轭点 Q 的轨迹是一条直线，这条直线叫做定点 P 关于此二阶曲线的极线，这个定点 P 叫做关于此二阶曲线的极点。圆锥曲线中焦点与准线就是一对极点与极线；椭圆准线上点 $(\dfrac{a^2}{c},0)$ 与通径所在直线 $x=c$ 也是一对极点与极线。

极线方程求法：求任意点 $P(x_0,y_0)$ 关于二次曲线 $f(x,y)=0$ 的极线，只要分别

用 $x_0x, y_0y, \frac{x_0+x}{2}, \frac{y_0+y}{2}$ 替换方程中的 x^2, y^2, x, y, 整理即得极线方程。

6、帕斯卡定理：对于任意一个内接于二阶曲线的六边（点）形，它的三对对边的交点在一条直线上。其特殊情形是若此六边形（含凹六边形）有两对边互相平行, 则分别交于无穷远点，则第三对边也互相平行，进而也交于无穷远点而共线（无穷远直线）。



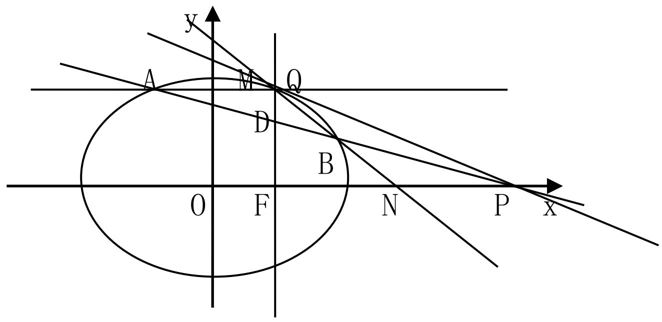
如图，椭圆内接六边形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 中，三对对边 A_1A_2 和 A_4A_5 、 A_2A_3 和 A_5A_6 、 A_3A_4 和 A_6A_1 的交点共线。若其中两组对边平行，即分别交于无穷远点，则第三组对边也平行，即也交于无穷远点，进而这三个无穷远点仍共线（即无穷远直线）。

二、试题举例

例 1（2024 年全国甲卷理科 20 题）设椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的右焦点为 F ，点 $M(1,\frac{3}{2})$ 在 C 上，且 $MF\perp x$轴.

（1）求 C 的方程;

（2）过点 $P(4,0)$ 的直线交 C 于 A,B 两点， N 为线段 FP 的中点，直线 NB 交直线 MF 于点 Q，证明： $AQ\perp y$轴.



解：（1） $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 解略.

(2) 连 PQ，把点 $P(4,0)$ 代入椭圆方程 $\frac{4\cdot x}{4}+\frac{0\cdot y}{3}=1$ 得 $x=1$，即直线 FM 为点 P 的极线，设直线 AB 交直线 FM 于 D，据上述定义 4、5，点 D 为点 P 关于椭圆的调和共轭点，则四点 A,D,B,P 为调和点列，则过点 Q 的直线 QA,QB,QD,QP 为调和线束。设其斜率分别为 $k_{QA},k_{QB},k_{QD},k_{QP}$，则据上述定义 3 有

$\dfrac{(k_{QA}-k_{QD})(k_{QB}-k_{QP})}{(k_{QB}-k_{QD})(k_{QA}-k_{QP})}=-1$，$\because$ k_{QD} 不存在，$\therefore$ $\dfrac{k_{QB}-k_{QP}}{k_{QA}-k_{QP}}=-1$，即

$k_{QB}-k_{QP}=k_{QP}-k_{QA}$，$\therefore$ $2k_{QP}=k_{QA}+k_{QB}$，设 $Q(1,t)(t\in R)$，又$\because$ $N(\dfrac{5}{2},0)$，$P(4,0)$，由斜率公示得

$k_{QB}=\dfrac{t}{1-\dfrac{5}{2}}=-\dfrac{2t}{3}$，$k_{QP}=\dfrac{t}{1-4}=-\dfrac{t}{3}$，代入 $2k_{QP}=k_{QA}+k_{QB}$ 得 $k_{QA}=0$，

即直线 $QA\perp y$轴，证毕。

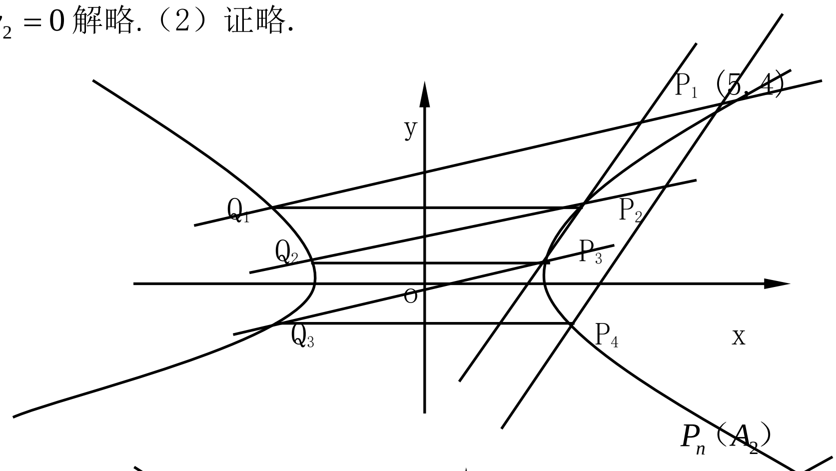
例 2 （2024 年全国新课标 2 卷 19 题）已知双曲线 $C:x^2-y^2=m(m>0)$，点 $P_1(5,4)$ 在 C 上，k 为常数，$0<k<1$．按照如下方式依次构造点 $P_n(n=2,3,\dots)$：过 P_{n-1} 作斜率为 k 的直线与 C 的左支交于点 Q_{n-1}，令 P_n 为 Q_{n-1} 关于 y 轴的对称点，记 P_n 的坐标为 (x_n,y_n)．

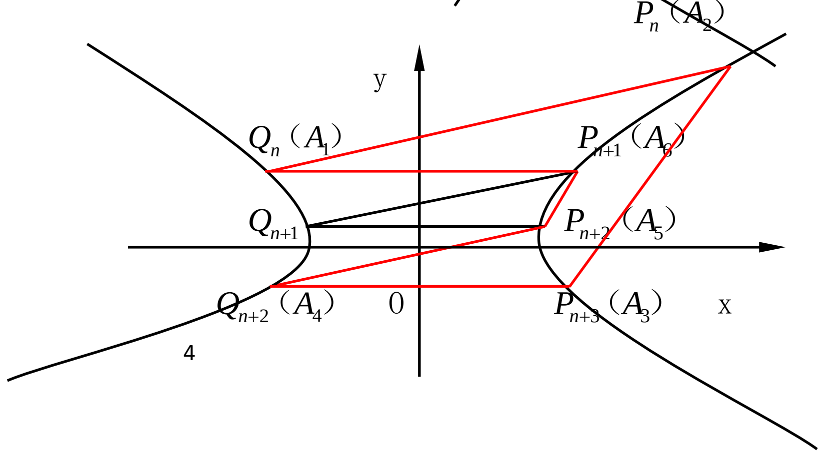
（1）若 $k=\dfrac{1}{2}$，求 x_2,y_2；

（2）证明：数列 $\{x_n-y_n\}$ 是公比为 $\dfrac{1+k}{1-k}$ 的等比数列；

（3）设 S_n 为 $\Delta P_nP_{n+1}P_{n+2}$ 的面积，证明：对任意正整数 n，$S_n=S_{n+1}$．

解：（1） $x_2=3,y_2=0$ 解略．（2）证略．





（3）如图，分析得问题解决的关键是证明$P_{n+1}P_{n+2}$ // P_nP_{n+3}。则依据上述定义6, 在双曲线内接凹六边形$Q_nP_nP_{n+3}Q_{n+2}P_{n+2}P_{n+1}$中，据条件有$Q_nP_n$ // $Q_{n+2}P_{n+2}$（A_1A_2 // A_4A_5），Q_nP_{n+1} // $Q_{n+2}P_{n+3}$（A_3A_4 // A_6A_1），则必有$P_{n+1}P_{n+2}$ // P_nP_{n+3}（A_2A_3 // A_5A_6）, 从而有面积$S_n = S_{n+1}$。

三、启发

对教师来说运用高数知识及结论，解小题时可提高速度迅速得解，对大题也可以快速找到思路和突破口，甚至可以直接得解，会大大提高解题效率。同时，我们要能够自觉地站在高观点下去俯瞰高中数学及教学, 对提升教学及高三备考质量是有帮助的。特别是对一些成绩徘徊不前处于高原期的“好学生”，高数的加入和助力可以让他们重新找到自信，以至突破高原使成绩逆袭。当然引入高数知识要慎之又慎，绝不可以增加学生额外负担。