2025年高考数学部分试题高数背景探源及解法

鸡西市高中数学名师工作室　孙长卿

本人在去年写了《2024年高考数学高数背景分析及高数解法》一文，今年继续对这个话题进行研究。重点对全国1、2卷压轴题的高数背景进行分析并求解，有不当之处请同行指正。

一、试题举例

高数背景知识(一)：

1、切比雪夫多项式

我们已知余弦函数两倍角公式，结合两角和公式，我们也可以导出余弦函数三倍角以至n倍角公式，如$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$，$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$，$\cos 4x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$，$\cos 5x = 16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x$，$\cdots$，从而我们得到切比雪夫多项式：$T_n(x) = \cos(n\arccos x)$是一个$n$次多项式，其中$x \in [-1,1]$，$n \in N$. 如，

$T_0(x) = 1$，$T_1(x) = x$，$T_2(x) = 2x^2 - 1$，$T_3(x) = 4x^3 - 3x$，$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$，$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$，$\cdots$，其余由以下递推关系确定.

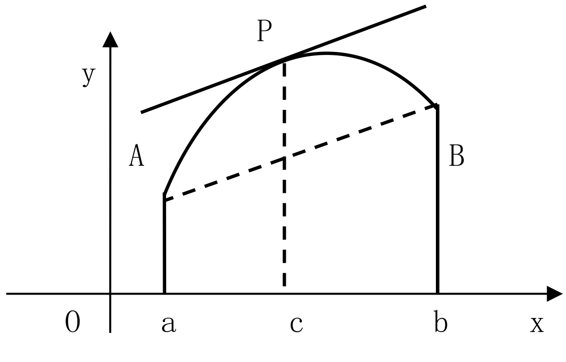
$T_0(x) = 1$，$T_1(x) = x$，$\cdots$，$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$　（$n \geq 1$）．

切比雪夫多项式在逼近理论、数值分析、信号处理、工程学、物理学等领域有着重要的应用。

2、拉格朗日中值定理

若函数$f(x)$满足条件：（1）在闭区间$[a,b]$上连续；（2）在开区间(a,b)内可导，则在区间(a,b)内至少存在一点c，使得$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.

此定理的几何意义是：在满足定理条件的曲线$y = f(x)$上至少存在一点$P(c, f(c))$，曲线在该点处的切线平行于曲线两端点的连线。如图所示



3、重要函数极限及不等式

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

(2) $\tan x > x > \sin x$， $x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$.

例 1（2025 年全国 1 卷第 19 题）（1）设函数 $f(x)=5\cos x-\cos 5x$，求 $f(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ 的最大值；（2）给定 $\theta\in(0,\pi)$ 和 $a\in R$，证明：存在 $y\in[a-\theta,a+\theta]$，使得 $\cos y\le\cos\theta$；（3）设 $b\in\mathbf{R}$，若存在 $\varphi\in\mathbf{R}$，使得 $5\cos x-\cos(5x+\varphi)\le b$ 对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，求 b 的最小值.

解：问（1）可由上述结论 1 中切比雪夫多项式 $\cos 5x=16\cos^5 x-20\cos^3 x+5\cos x$ 得 $f(x)=20\cos^3 x-16\cos^5 x$，求导得

$f'(x)=60\cos^2 x(-\sin x)-80\cos^4 x(-\sin x)=20\sin x\cos^2 x(4\cos^2 x-3)$.

当 $x\in[0,\dfrac{\pi}{4}]$ 时，令 $f'(x)=0$ 得 $x=0$ 或 $x=\dfrac{\pi}{6}$. 易知，当 $x\in(0,\dfrac{\pi}{6})$ 时，$f'(x)>0$，当 $x\in(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{4})$ 时，$f'(x)<0$. $\therefore$ $f(x)_{\max}=f$（$\dfrac{\pi}{6}$）$=3\sqrt{3}$.

据（2）问特征联想到拉格朗日中值定理（结论 2）有如下解法：对连续可导函数 $f(x)=\sin x$ 在区间 $[a-\theta,a+\theta]$ 上使用中值定理得

$\sin(a+\theta)-\sin(a-\theta)=f'(y)(a+\theta-a+\theta)$，其中 $y\in[a-\theta,a+\theta]$. 再用和差化积公式有

$2\cos a\sin\theta=2\theta\cos y$，又 $\theta\in(0,\pi)$，$\therefore$ $\cos y=\dfrac{\sin\theta}{\theta}\cos a$，又 $a\in R$，

$\therefore$ $\cos y=\dfrac{\sin\theta}{\theta}\cos a\le\dfrac{\sin\theta}{\theta}$，即 $\cos y\le\dfrac{\sin\theta}{\theta}$，又 $\cos y-\cos\theta\le\dfrac{\sin\theta}{\theta}-\cos\theta$.

设 $h(\theta)=\dfrac{\sin\theta}{\theta}-\cos\theta$，$\theta\in(0,\pi)$. 即 $\cos y-\cos\theta\le h(\theta)$.

$h(\theta)=\cos\theta(\dfrac{\tan\theta}{\theta}-1)$（$\theta\ne\dfrac{\pi}{2}$），易知当 $\theta\in(0,\dfrac{\pi}{2})$ 时背景 t，$h(\theta)>0$，当 $\theta\in(\dfrac{\pi}{2},\pi)$ 时，$h(\theta)>0$，当 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 时，$h(\theta)=\dfrac{2}{\pi}$. 而当 $\theta\to 0$ 时，利用结论 3 有 $\lim\limits_{\theta\to 0}(\dfrac{\sin\theta}{\theta}-\cos\theta)=0$，$\theta\to\pi$ 时，$\lim\limits_{\theta\to\pi}(\dfrac{\sin\theta}{\theta}-\cos\theta)=1$，即 $0<h(\theta)<1$.

$\therefore$ 对任意给定 $\theta\in(0,\pi)$，必存在 $y\in[a-\theta,a+\theta]$，使得 $\cos y-\cos\theta\le 0$ 即 $\cos y\le\cos\theta$. 这里注意是存在成立，不是恒成立。如当 $a=1,\theta=\dfrac{\pi}{4}$，则存在 $y=\dfrac{\pi}{3}$

$\in [1-\frac{\pi}{4},1+\frac{\pi}{4}]$，使得 $\cos y \le \cos\theta$，存在 $y=\frac{\pi}{6}\in[1-\frac{\pi}{4},1+\frac{\pi}{4}]$，使得 $\cos y > \cos\theta$；当 $a=-1,\theta=\frac{3\pi}{4}$，则存在 $y=-\frac{5\pi}{6}\in[-1-\frac{3\pi}{4},-1+\frac{3\pi}{4}]$，使得 $\cos y\le\cos\theta$，存在 $y=\frac{\pi}{3}\in[-1-\frac{3\pi}{4},-1+\frac{3\pi}{4}]$，使得 $\cos y>\cos\theta$。

（3）分两种情况：当 $\varphi=0$ 时，由（1）$f(x)=5\cos x-\cos 5x$，则

$f'(x)=20\sin x\cos^2 x(4\cos^2 x-3)$，考虑 $g(x)=\sin x(4\cos^2 x-3)$，令 $g(x)=0$ 得

$x=k\pi,k\in Z$ 或 $x=2k\pi\pm\frac{\pi}{6},k\in Z$ 或 $x=2k\pi\pm\frac{5\pi}{6},k\in Z$，$\therefore$结合正、余弦图象得，区间 $[2k\pi,2k\pi+\frac{\pi}{6}](k\in Z)$ 上 $f(x)$ 单增，$(2k\pi+\frac{\pi}{6},2k\pi+\frac{5\pi}{6}](k\in Z)$ 减，$x=2k\pi+\frac{\pi}{6}(k\in Z)$ 取极大值，代入得 $f(x)_{极大}=3\sqrt{3}$，$(2k\pi+\frac{5\pi}{6},2k\pi+\pi](k\in Z)$ 增，$(2k\pi+\pi,2k\pi+\frac{7\pi}{6}](k\in Z)$ 减，$x=2k\pi+\pi(k\in Z)$ 取极大值，代入得 $f(x)_{极大}=-4$，$(2k\pi+\frac{7\pi}{6},2k\pi+\frac{11\pi}{6}](k\in Z)$ 增，$(2k\pi+\frac{11\pi}{6},2k\pi+2\pi](k\in Z)$ 减，$x=2k\pi+\frac{11\pi}{6}(k\in Z)$ 取极大值，代入得 $f(x)_{极大}=3\sqrt{3}$. 综上，$f(x)_{\max}=3\sqrt{3}$.

$\therefore b\ge 3\sqrt{3}$, b 最小值为 $3\sqrt{3}$。

对 $\varphi\ne 0$ 时，设 $h(x)=5\cos x-\cos(5x+\varphi)$, 只需要证明存在 x_0，使得

$h(x_0)\ge 3\sqrt{3}$.

取 $x_0\in[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}]$，令 $y_0=5x_0+a$， $a\in R$, 则 $y_0\in[a-\frac{5\pi}{6},a+\frac{5\pi}{6}]$，令

$\theta=\frac{5\pi}{6}\in(0,\pi)$，由（2）知，$\cos y_0\le\cos\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

令 $\varphi=a$， $y_0=5x_0+\varphi$，又 $\cos x_0\ge\frac{\sqrt{3}}{2}$， $\cos(5x_0+\varphi)\le-\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$-\cos(5x_0+\varphi)\ge\frac{\sqrt{3}}{2}$, 综上, $h(x_0)=5\cos x_0-\cos(5x_0+\varphi)\ge 3\sqrt{3}$.$\therefore b$ 最小值为 $3\sqrt{3}$。

注：函数 $h(x)=5\cos x-\cos(5x+\varphi)$ 中，若 $\varphi=\frac{\pi}{4}$，则

$h(\frac{\pi}{6})=\frac{10\sqrt{3}+\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}>3\sqrt{3}$，而 $\varphi=\frac{5\pi}{6}$， $h(\frac{\pi}{6})=\frac{5\sqrt{3}-1}{2}<3\sqrt{3}$，所以

$h(x) \geq 3\sqrt{3}$ 只是一种存在成立。

高数背景知识（二）：

4、马尔可夫链与伯努利过程

马尔可夫链是一种具有无记忆性的随机过程，其核心特性是状态转移的马尔可夫性质：未来状态的条件概率分布仅依赖于当前状态，而与过去状态无关。数学表达为

$$P(X_{n+1}=x \mid X_n=x_n, X_{n-1}=x_{n-1}, \cdots, X_0=x_0)=P(X_{n+1}=x \mid X_n=x_n).$$

马尔可夫链是概率统计中的一个重要模型，在日常中生活中用于天气预报、网页浏览、语音识别、股票涨跌等。马尔可夫是切比雪夫的学生，他们都是俄国著名数学家。

伯努利过程是一个由一系列独立同分布的伯努利重复实验（如 n 重伯努利实验）组成的离散随机过程，每个试验只有成功或失败两种结果，且成功的概率恒为 p。由于伯努利过程中各次试验相互独立，每个状态转移仅取决于当前状态而与历史无关，进而满足马尔可夫链的无记忆性。所以伯努利过程是马尔可夫过程的一个特例。

例 2（2025 年全国 2 卷第 19 题）甲、乙两人进行乒乓球练习，每个球胜者得 1 分，负者得 0 分．设每个球甲胜的概率为 $p\left(\frac{1}{2}<p<1\right)$，乙胜的概率为 q，$p+q=1$，且各球的胜负相互独立，对正整数 $k \geq 2$，记 p_k 为打完 k 个球后甲比乙至少多得 2 分的概率，q_k 为打完 k 个球后乙比甲至少多得 2 分的概率．

（1）求 p_3, p_4（用 p 表示）：

（2）若 $\frac{p_4-p_3}{q_4-q_3}=4$，求 p：

（3）证明：对任意正整数 m， $p_{2m+1}-q_{2m+1}<p_{2m}-q_{2m}<p_{2m+2}-q_{2m+2}$．

解：（1） $p_3=p^3$， $p_4=p^4+C_4^3p^3q=p^3(4-3p)$；

（2）同理得 $q_3=q^3$， $q^4=q^3(4-3q)$，代入得 $p=\frac{2}{3}$；

（3）由（1）知 p_k 和 q_k 大小各为一个以甲乙得分数为随机变量的 k 重伯努利实验的概率和。我们只研究甲的情况。

进一步研究 p_5, p_6, p_7 等的大小得， $p_5=p^5+C_5^4p^4q$，

$p_6=p^6+C_6^5p^5q+C_6^4p^4q^2$， $p_7=p^7+C_7^6p^6q+C_7^5p^5q^2$. 我们发现随着 k 值奇偶的

变化呈现出不同的规律性：于是，设甲打完k（$k\ge 2$）个球后的得分数为t（即甲胜t次），则乙得分数为$k-t$（即乙胜$k-t$次），要想甲比乙至少多 2 分，则应满足$t-(k-t)\ge 2$，即$t\ge 1+\frac{k}{2}$. 当$k=2m$（$m\ge 1$）时，$t\ge 1+m$，即甲至少得$m+1$分（即甲至少胜$m+1$次），此时乙至多得$m-1$分（即乙至多胜$m-1$次），分值相差至少 2 分且以 2 为等差数列递增，项数为m项。当$k=2m+1$时，$t\ge 1+m+\frac{1}{2}$，即甲至少得$m+2$分，此时乙至多得$m-1$分，分值相差至少 3 分且以 2 为等差数列递增，项数为m项。一般地有

$$p_{2m}=p^{2m}+C_{2m}^{2m-1}p^{2m-1}q^{1}+C_{2m}^{2m-2}p^{2m-2}q^{2}+\cdots+C_{2m}^{m+1}p^{m+1}q^{m-1}\text{（1）},$$

$$p_{2m+1}=p^{2m+1}+C_{2m+1}^{2m}p^{2m}q^{1}+C_{2m}^{2m-1}p^{2m-1}q^{2}+\cdots+C_{2m+1}^{m+2}p^{m+2}q^{m-1}\text{（2）},$$

$$p_{2m+2}=p^{2m+2}+C_{2m+2}^{2m+1}p^{2m+1}q^{1}+C_{2m+2}^{2m}p^{2m}q^{2}+\cdots+C_{2m+2}^{m+2}p^{m+2}q^{m}\text{（3）}.$$

我们继续研究p_{2m},p_{2m+1},p_{2m+2}间的关系发现，p_{2m+2}的展开式（3）式中共有$m+1$项，（2）式有m项，（2）式再加一项应是$C_{2m+1}^{m+1}p^{m+1}q^{m}$，而此时甲比乙多 1 分，所以再打一球到$2m+2$时，这最后一球必须是甲胜，从而达到甲与乙多 2 分的目标，所以有

$$p_{2m+2}=p_{2m+1}+C_{2m+1}^{m+1}p^{m+1}q^{m}\cdot p.$$

至于（2）式中的最后一项$C_{2m+1}^{m+2}p^{m+2}q^{m-1}$，因为甲已比乙多 3 分，所以最后一球（到$2m+2$个球），甲胜负都可以，即

$C_{2m+1}^{m+2}p^{m+2}q^{m-1}=C_{2m+1}^{m+2}p^{m+2}q^{m-1}(p+q)=C_{2m+1}^{m+2}p^{m+2}q^{m-1}p+C_{2m+1}^{m+2}p^{m+2}q^{m-1}q$，其中

$C_{2m+1}^{m+2}p^{m+2}q^{m-1}q+C_{2m+1}^{m+1}p^{m+1}q^{m}\cdot p=C_{2m+2}^{m+2}p^{m+2}q^{m}$即为（3）式的最后一项（甲比乙多 2 分）。

同理有，

$$p_{2m}=p^{2m}(p+q)+C_{2m}^{2m-1}p^{2m-1}q^{1}(p+q)+\cdots+C_{2m}^{m+1}p^{m+1}q^{m-1}(p+q)\ (4).$$

(4)式说明，当打完$2m$个球后，打到$2m+1$个球时，最后一球的胜负均有两种结果。由于$2m$个球中甲乙的分差分别为$2m$，$2m-2$，…，6，4，2 分。当分差为 4 分及以上时，多打那个球甲胜负均可，总会比乙多至少 3 分及以上。只有最后一项$C_{2m}^{m+1}p^{m+1}q^{m-1}(p+q)$中，甲若负则只比乙多 1 分，所以只有胜才能达到多 3 分目的。所以有

$p_{2m+1}=p_{2m(4式)}-C_{2m}^{m+1}p^{m+1}q^{m-1}\cdot q$，或$p_{2m+1}=p_{2m}-C_{2m}^{m+1}p^{m+1}q^{m-1}$（甲比乙至少多 3 分及以上）$+C_{2m}^{m+1}p^{m+1}q^{m-1}\cdot p$（多 3 分）.

(4) 中 $C_{2m}^{m+2}p^{m+2}q^{m-2}(p+q)=C_{2m}^{m+2}p^{m+3}q^{m-2}+C_{2m}^{m+2}p^{m+2}q^{m-1}$，其中 $C_{2m}^{m+2}p^{m+2}q^{m-1}$ $+C_{2m}^{m+1}p^{m+1}q^{m-1}\cdot p=C_{2m+1}^{m+2}p^{m+2}q^{m-1}$ 即为（2）式中的最后一项（甲比乙多 3 分）。

对乙的情况同理不再赘述。有了上述关系结论，最后不等式的证明就不难了。如原不等式可转化为证明

$q_{2m}-q_{2m+1}<p_{2m}-p_{2m+1}$ 及 $q_{2m+2}-q_{2m}<p_{2m+2}-p_{2m}$，其中 p_{2m+2} 与 p_{2m} 关系可用 $p_{2m+2}=p_{2m+1}+C_{2m+1}^{m+1}p^{m+2}q^{m}$ 和 $p_{2m+1}=p_{2m}-C_{2m}^{m+1}p^{m+1}q^{m}$ 代换得到。通过整理最后转化为 p 与 q 的大小比较，显然 $p>q$，不再赘述。

会发现，上述证明过程似乎没有看到马尔可夫链的影子。事实上，因每打 k 个球的随机过程的无记忆性、结果的二元性等特征满足上述伯努利过程，进而属于马尔可夫链概率问题。而典型的马尔可夫链概率问题当属人教版数学选择性必修第三册 91 页第 10 题及 2023 年高考数学全国 1 卷第 21 题等。

二、启发

用高观点去俯瞰高中数学及教学，可以深化我们对这门学科本质及教学规律的再认识，毕竟深入才能浅出，居高才能临下，所以这对提升对数学学科本质的再认识、课堂教学回归思维本质，及提升高三备考质量是有帮助的。

参考文献：.

1 梅向明等.高等几何[M].北京：高等教育出版社,2008,4.

2 朱德祥,朱维宗.高等几何[M].北京：高等教育出版社,2009,6.

3 东北师范大学,延边大学等数学系.数学分析[M].北京：高等教育出版社,1986,2.

4 孙长卿.从直线两点式方程的变化看数学之美[J].中小学数学（高中版），2011(4)：46-48.