

## 对 2025 年高考数学全国 2 卷 19 题第三问解析

鸡西市高中数学名师工作室 王海春

### 一、题目背景

在 2025 年高考数学 2 卷中，命题者创新情境设计，第 19 题以学生熟悉的乒乓球练习为背景，构建概率模型。这种贴近生活实际的情境，不仅让学生感受到数学与生活的紧密联系，还能考查学生运用数学知识解决实际问题的能力，体现了数学的应用价值，符合高考评价体系“一核四层四翼”中对基础性、综合性、应用性和创新性的考查要求。

### 二、题目分析

1.知识考点：本题主要涉及独立事件概率的计算，以及通过建立递推关系来求解概率和证明不等式。涵盖了概率的基本定义、互斥事件概率加法公式、独立事件概率乘法公式等知识点。

2.能力要求：要求学生具备较强的逻辑思维能力，能够分析比赛过程中各种得分情况，准确建立概率模型；具备良好的数学运算能力，熟练运用概率公式进行计算和推导；同时，考查学生从特殊到一般的归纳推理能力，以及证明不等式时的逻辑严谨性。

### 三、试题呈现

19. (17分)

甲、乙两人进行乒乓球练习，每个球胜者得1分、负者得0分. 设每个球甲胜的概率为 $p$  ( $\frac{1}{2} < p < 1$ )，乙胜的概率为 $q$ ， $p+q=1$ ，且各球的胜负相互独立，对正整数 $k \geq 2$ ，记 $p_k$ 为打完 $k$ 个球后甲比乙至少多得2分的概率， $q_k$ 为打完 $k$ 个的球后乙比甲至少多得2分的概率.

(1) 求 $p_3, p_4$  (用 $p$ 示)

(2) 若 $\frac{p_4 - p_3}{q_4 - q_3} = 4$ ，求 $p$ ；

(3) 证明：对任意正整数 $m$ ， $p_{2m+1} - q_{2m+1} < p_{2m} - q_{2m} < p_{2m+2} - q_{2m+2}$ .

#### 四、解题思路

概率与递推数列相结合的试题并不陌生，在教材选修 2—1P91 页课后习题、以往的高考题及模拟题中均有出现，也就是对马尔科夫链的考察。本文参照网上一些对本题的解法，优化一种学生更为接受的解题思路。

要证： $p_{2m+1} - q_{2m+1} < p_{2m} - q_{2m} < p_{2m+2} - q_{2m+2}$

依据同构思想转化只需要证明： $p_{2m+1} - p_{2m} < q_{2m+1} - q_{2m}$

$$p_{2m+2} - p_{2m} > q_{2m+2} - q_{2m}$$

我们首先证明： $p_{2m+1} - p_{2m} < q_{2m+1} - q_{2m}$ 。

先明确  $p_{2m+1}$  的含义：

表示打完  $2m+1$  个球后甲比乙至少多得 2 分，即甲至少胜  $m+2$  个球，乙至多胜  $m-1$  个球。具体来说：甲胜  $m+2, m+3, \dots, 2m+1$ ；乙胜  $m-1, m-2, \dots, 0$ ；

$p_{2m}$  的含义：

即甲至少胜  $m+1$  个球，乙至多胜  $m-1$  个球。具体来说：甲胜  $m+1, m+2, \dots, 2m$ ；乙胜  $m-1, m-2, \dots, 0$ ；前  $2m$  个球甲胜  $m+1$ ，乙胜  $m-1$ ，第  $2m+1$  个球甲胜满足题意，乙胜不满足题意，所以需要把乙胜这种情况去掉。

所以有： $p_{2m+1} = p_{2m} - C_{2m}^{m+1} p^{m+1} q^{m-1} q$ ，即： $p_{2m+1} - p_{2m} = -C_{2m}^{m+1} p^{m+1} q^m$

同理可得： $q_{2m+1} - q_{2m} = -C_{2m}^{m+1} q^{m+1} p^m$  又因为  $p > \frac{1}{2} > q$ ，所以两式相减得：

$$(p_{2m+1} - p_{2m}) - (q_{2m+1} - q_{2m}) = C_{2m}^{m+1} q^{m+1} p^m - C_{2m}^{m+1} p^{m+1} q^m = C_{2m}^{m+1} p^m q^m (q - p) < 0$$

所以： $p_{2m+1} - p_{2m} < q_{2m+1} - q_{2m}$ 。

下面证明： $p_{2m+2} - p_{2m} > q_{2m+2} - q_{2m}$

根据第一部分的证明，同样： $p_{2m}$  的含义，即甲至少胜  $m+1$  个球，乙至多胜  $m-1$  个球。具体来说：甲胜  $m+1, m+2, \dots, 2m$ ；乙胜  $m-1, m-2, \dots, 0$ ；再打两个球，如果甲连胜两个球满足，甲乙各胜一个球也满足，但乙连胜两球就不满足需要去掉；想要得到  $p_{2m+2}$  除上述情况外还有一种情况需要考虑，就是甲乙各胜  $m$  个球后，甲连胜 2 球，这种情况要加上。

$$\text{所以有： } p_{2m+2} = p_{2m} - C_{2m}^{m+1} p^{m+1} q^{m-1} q^2 + C_{2m}^m p^m q^m p^2$$

$$\text{即： } p_{2m+2} - p_{2m} = -C_{2m}^{m+1} p^{m+1} q^{m-1} q^2 + C_{2m}^m p^m q^m p^2$$

$$\text{同理可得： } q_{2m+2} - q_{2m} = -C_{2m}^{m+1} q^{m+1} p^{m-1} p^2 + C_{2m}^m q^m p^m q^2$$

又因为  $p > \frac{1}{2} > q$  所以两式相减得： $(p_{2m+2} - p_{2m}) - (q_{2m+2} - q_{2m}) = C_{2m}^m p^m q^m (p^2 - q^2)$

$$= C_{2m}^m p^m q^m (p+q)(p-q) > 0, \text{ 所以有： } p_{2m+2} - p_{2m} > q_{2m+2} - q_{2m}。$$

## 五、拓展延伸

1.改变情境：将乒乓球比赛换成篮球比赛、射击比赛等其他具有胜负结果的场景，改变得分规则和概率设定，让学生重新构建概率模型求解类似问题，加深对概率应用的理解。

2.增加条件：例如考虑比赛中的“赛点”情况，当一方达到一定分数时比赛提前结束，求在这种情况下甲、乙获胜的概率等，进一步增加问题的复杂性和综合性。

## 六、教学启示

1.加强情境教学：在日常教学中，多引入生活实际情境，让学生在熟悉的场景中运用数学知识解决问题，提高学生对数学的兴趣和应用意识。

2.注重知识体系构建：帮助学生构建完整的概率知识体系，理解概率的基本概念、公式之间的联系，以及不同类型概率问题的解题方法。

3.培养思维能力：通过类似本题的练习，着重培养学生的逻辑思维、归

纳推理和数学运算能力，提高学生分析问题和解决问题的能力。

4.鼓励一题多解和拓展延伸：引导学生从不同角度思考问题，探索多种解题方法，同时对题目进行拓展延伸，培养学生的创新思维和发散思维。

5.高三复习过程中，对待压轴题，要避免跟风式的模仿，押题式的训练。对绝大多数学生来说，要立足基础，扎实提高数学思维，提高数学素养，理性看到高考压轴题。